

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX A

- 1.** Se consideră ecuațiile $x^2 + 2bx + 2c = 0$ și $x^2 + 2cx + 2b = 0$, unde b și c sunt numere reale pozitive.
- a) Dacă numerele b și c sunt distincte arătați că ecuațiile au o rădăcină reală comună.
- b) Dacă produsul celor patru numere reale care reprezintă soluțiile celor două ecuații este 16, să se afle b și c .

Soluție:

- a) Dacă t este rădăcină reală comună atunci $t^2 + 2bt + 2c = 0$; $t^2 + 2ct + 2b = 0$ **1p**
 Obține $t(2b - 2c) = 2b - 2c \Rightarrow t = 1$ rădăcină reală comună **1 p**
- b) Notând cu x_1, x_2 respectiv x_3, x_4 rădăcinile celor două ecuații putem scrie $x_1 \cdot x_2 = 2c$; $x_3 \cdot x_4 = 2b$ și $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 16 \Leftrightarrow b \cdot c = 4$ **(1)** **2p**
- Din condiția ca ecuațiile să aibă rădăcini reale ($\Delta_1 \geq 0$; $\Delta_2 \geq 0$) rezultă $b^2 \geq 2c$; $c^2 \geq 2b$ **(2)** **1p**
- Din relațiile **(1)** și **(2)** deducem $b \geq 2$; $c \geq 2$, care împreună cu relația **(1)** conduce la $b = c = 2$ **1p**
- Se verifică existența rădăcinilor cu produsul 16 pentru valorile găsite **1p**

- 2.** Se consideră funcția $f: R \rightarrow R, f(x) = 2x^2 + a \cdot x - 1, a \in R$

- a) Găsiți $a \in R$ dacă funcția f este funcție pară.
- b) Pentru $a = 0$ verificați că punctele $M\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{3}{4}\right), N\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{3}{4}\right)$ sunt situate pe graficul funcției și demonstrați că aria suprafeței delimitată de graficul funcției f și axa Ox este mai mare decât $\frac{5}{4\sqrt{2}}$
- c) Pentru $a = 0$ demonstrați că $(f \circ f)(\cos(u)) = \cos(4u), (f \circ f \circ f)(\cos(u)) = \cos(8u)$, pentru orice număr real u .

Soluție:

- a) Din condiția $f(-x) = f(x)$ pentru orice x -real deducem $a=0$ **1p**
- b) Notând cu $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ punctele de intersecție cu axa Ox ale graficului funcției și cu $M\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{3}{4}\right), N\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{3}{4}\right)$ punctele simetrice fata de Oy situate pe graficul funcției atunci aria cerută este mai mare decât suma dintre aria trapezului isoscel $ABNM$ și aria triunghiului VMN , unde $V(0, -1)$ este vârful parabolei **1p**
- Obține $A_{ABNM} = \frac{9}{8\sqrt{2}}; A_{VMN} = \frac{1}{8\sqrt{2}}$ **1p**
- Finalizare : Aria cerută este mai mare decât suma $\frac{9}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}} = \frac{5}{4\sqrt{2}}$ **1p**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologică : profil tehnic

- c) Obține $f(\cos u) = 2\cos^2 u - 1 = \cos(2u)$ 1p
 $(f \circ f)(\cos u) = f(\cos 2u) = 2\cos^2 2u - 1 = \cos(4u)$ 1p
 $(f \circ f \circ f)(\cos u) = (f \circ f)(\cos 2u) = 2\cos^2 4u - 1 = \cos(8u)$ 1p

3. Se consideră vectorii \vec{u}, \vec{v} și numărul real $t \in [0, 1]$

- a) Demonstrați că $|t \cdot \vec{u} + (1-t) \cdot \vec{v}| + |t \cdot \vec{v} + (1-t) \cdot \vec{u}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$ pentru orice $t \in [0, 1]$.
b) În triunghiul ABC considerăm punctele $M, N \in [BC]$ astfel încât $BM = CN$. Notăm $\frac{MC}{BM} = \frac{BN}{CN} = \frac{1}{k}$. Demonstrați că $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{k+1} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1} \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{k+1} \overrightarrow{AC} + \frac{k}{k+1} \overrightarrow{AB}$ și ,apoi utilizând inegalitatea de la punctul (a) demonstrați că $AM + AN \leq AB + AC$

Soluție:

- a) Utilizăm inegalitatea triunghiulară $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$. Astfel $|t \cdot \vec{u} + (1-t) \cdot \vec{v}| \leq t|\vec{u}| + (1-t)|\vec{v}|$ și $|t \cdot \vec{v} + (1-t) \cdot \vec{u}| \leq t|\vec{v}| + (1-t)|\vec{u}|$ 2p

Adunând inegalitățile anterioare obținem $|t \cdot \vec{u} + (1-t) \cdot \vec{v}| + |t \cdot \vec{v} + (1-t) \cdot \vec{u}| \leq t|\vec{u}| + (1-t)|\vec{v}| + t|\vec{v}| + (1-t)|\vec{u}|$ 1p

- b) Avem $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{k+1} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1} \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{k+1} \overrightarrow{AC} + \frac{k}{k+1} \overrightarrow{AB}$ 2p

Utilizând inegalitatea de la punctul (a) obținem :

$$AM + AN = \left| \frac{1}{k+1} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1} \overrightarrow{AC} \right| + \left| \frac{1}{k+1} \overrightarrow{AC} + \frac{k}{k+1} \overrightarrow{AB} \right| \leq AB + AC \text{ 2p}$$

- 4.** O firmă ,afectată de criză ,urmează a renunța la unul din cele trei schimburi (S_1, S_2, S_3) în care se desfășoară activitatea pentru a se încadra în bugetul fixat **B**. In urma analizării costurilor de producție *compartimentul organizare* afirmă că bugetul **B** ajunge pentru funcționarea S_1, S_2 timp de 12 luni sau pentru funcționarea S_1, S_3 timp de 9 luni sau pentru funcționarea S_2, S_3 timp de 4 luni. Justificați că analiza făcută este greșită .

Soluție:

Notam cu c_1, c_2, c_3 cheltuielile lunare ale fiecăruia dintre schimburile S_1, S_2, S_3

Conform enunțului putem scrie :

$$12(c_1 + c_2) = B$$

$$9(c_1 + c_3) = B$$

$$4(c_3 + c_2) = B \text{ 3p}$$

$$\text{Adunând relațiile anterioare obținem: } c_1 + c_2 + c_3 = \frac{2B}{9} \text{ 2p}$$

$$\text{Din relațiile anterioare obținem } c_1 = -\frac{B}{36}, \text{ astfel că analiza este eronată 2p}$$

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A X A

1. Raluca a cumpărat pentru colecția sa 4 noi timbre, câte unul din Anglia, Franța, Italia și Grecia. Fără cel din Anglia ea ar fi plătit 4 lei, fără cel din Franța ea ar fi plătit 4,5 lei, fără cel din Italia ea ar fi plătit 4,4 lei, iar prețul timbrelor fără cel din Grecia este de 2,7 lei. Cât a costat fiecare dintre cele 4 timbre?

Soluție :

Notăm cu a,b,c respectiv d prețul timbrului din Anglia, Franța, Italia respectiv Grecia1p

Atunci putem scrie :

$$\begin{cases} b + c + d = 4 \\ a + c + d = 4,5 \\ a + b + d = 4,4 \\ a + b + c = 2,7 \end{cases} \dots\dots\dots 2p$$

Adunând $3(a+b+c+d)=15,6$ de unde $a+b+c+d=5,2$ 2p

Folosind această relație și ecuațiile sistemului obținem:

a=1,2 lei (Anglia)

b=0,7 lei (Franța)

c=0,8 lei (Italia)

d=2,5 lei (Grecia)2p

2. a) Demonstrați că $4x - x^2 \leq 4, \forall x \in R$.

b) Demonstrați că ecuația $\frac{(2011^x + 1)^2}{2011^x} = (4x - x^2)$ nu are soluții reale.

c) Determinați numerele reale x și y, astfel încât $y^2 - 4y + 8 = 4\log_2(x^2 + 1) - \log_2^2(x^2 + 1)$.

Soluție:

a) $4x - x^2 \leq 4 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq 0, \forall x \in R$ 1p

b) $\frac{(2011^x + 1)^2}{2011^x} = 4x - x^2 \leq 4$ 1p

$(2011^x - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow x = 0$ care nu verifică ecuația 1p

c) $y^2 - 4y + 8 = 4\log_2(x^2 + 1) - \log_2^2(x^2 + 1) \leq 4$ 1p

$\Rightarrow (y - 2)^2 \leq 0$, deci $y = 2$ 1p

Obținem $(\log_2(x^2 + 1) - 2)^2 = 0$ 1p

Găsim $x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologică : profil tehnic

3. a) Demonstrați că $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \forall x, y > 0$ iar $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma, \forall \alpha, \beta, \gamma > 0$

b) Fie $a, b, c > 1$ și $x > 0$. Demonstrați echivalența: $a^x = bc \Leftrightarrow x = \frac{\lg b + \lg c}{\lg a}$.

c) Dacă există $a, b, c > 1$ și $x, y, z > 0$ care verifică simultan relațiile:

$$a^x = bc, b^y = ca, c^z = ab \text{ arătați că: } \frac{x+y+z}{3} \geq 2 \text{ și } \sqrt[3]{xyz} \geq 2.$$

Soluție:

a) $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0, \forall x, y > 0$ 1p

$\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}, \gamma + \beta \geq 2\sqrt{\gamma\beta}, \alpha + \gamma \geq 2\sqrt{\alpha\gamma}$ iar prin înmulțire rezultă cerința 1p

b) $a^x = bc \Leftrightarrow \lg a^x = \lg bc \Leftrightarrow x = \frac{\lg b + \lg c}{\lg a}, \forall a, b, c > 0 \text{ și } a \neq 1$ 1p

c) $x = \frac{\lg b + \lg c}{\lg a}, y = \frac{\lg c + \lg a}{\lg b}, z = \frac{\lg a + \lg b}{\lg c}$ 1p

$x + y + z = \left(\frac{\lg a}{\lg b} + \frac{\lg b}{\lg a}\right) + \left(\frac{\lg b}{\lg c} + \frac{\lg c}{\lg b}\right) + \left(\frac{\lg c}{\lg a} + \frac{\lg a}{\lg c}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6$ 1p

$\Rightarrow \frac{x+y+z}{3} \geq 2$ 1p

$\Rightarrow xyz \geq 8, \text{ deci } \sqrt[3]{xyz} \geq 2$ 1p

4. Fie expresia $E(x) = \sqrt{\frac{4-x}{4+x}} + a \cdot \sqrt{\frac{4+x}{4-x}}, a \in R$.

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $E(x)$ are sens.

b) Dacă $a = 1$, rezolvați ecuația $E(x) = 2$.

c) Determinați valorile lui a astfel încât ecuația $E(x) = 2$ să aibă soluții reale și apoi rezolvați ecuația.

Soluție:

a) $\frac{4-x}{4+x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 4)$ 1p

b) Notăm $\sqrt{\frac{4-x}{4+x}} = t$ 1p

Ecuația devine $(t - 1)^2 = 0$, cu soluția $t = 1$ 1p

Avem soluția $x = 0$ 1p

c) Cu notația de la punctul b) ecuația este echivalentă cu ecuația $(t - 1)^2 = 1 - a$, care are soluție pentru $a \leq 1$ 1p

Pentru $t = 1 + \sqrt{1-a}$, obținem $x = \frac{4a - 4 - 8\sqrt{1-a}}{3 - a + 2\sqrt{1-a}}$ 1p

Și pentru $t = 1 - \sqrt{1-a}$, obținem $x = \frac{4a - 4 + 8\sqrt{1-a}}{3 - a - 2\sqrt{1-a}}$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A XI A

1. Fie $f: R^* \rightarrow M_3(R)$, $f(x) = x \cdot A$, unde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculați $f^2(x)$; $f^3(x)$.

b) Determinați $f^{2011}(1)$.

c) Găsiți $x \in R^*$ astfel încât : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot f(x) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = (2011)$, unde (2011) este matrice cu o

linie și o coloană.

Soluție:

a) $f^2(x) = x^2 A^2$; $f^3(x) = x^3 I_3$ unde

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3p

b) $f^{2011}(1) = A^{2011} = (A^3)^{670} \cdot A = A$ 2p

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot f(x) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = (2011) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & x & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = (2011)$ de unde $x=2011$ 2p

2. O navetă spațială are traiectoria dată de legea $y = f(t) = \sqrt{\frac{t^2 - 4}{4}}$, unde t reprezintă timpul în

secunde iar $f(t)$ reprezintă înălțimea în kilometri (de la momentul $t = 0$ până la $t = 2$ se consideră că are loc desprinderea de pe rampa de lansare deci înălțimea este considerată 0).

a) Să se determine înălțimea la care ajunge naveta după 4 secunde de la desprinderea de pe rampa de lansare.

b) Să se demonstreze că traiectoria este concavă

c) Să se determine asimptota traiectoriei. (considerând că timpul tinde spre infinit).

Soluție:

a) $f(6) = 2\sqrt{2}$ km 2p

b) $f'(t) = \frac{t}{2\sqrt{t^2 - 4}}$, $t > 2$ 1p

$f''(t) = \frac{-2}{(t^2 - 4)\sqrt{t^2 - 4}}$, $t > 2$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologică : profil tehnic

Derivata a doua este negativă deci traiectoria este concavă **1p**

c) $m = \frac{1}{2}$ **1p**

$n = 0$ și $y = \frac{1}{2}t$ e asimptota oblică **1p**

3. Fie M mulțimea tuturor matricilor de ordin 3 formate doar cu numerele 1, 3, 5,...,17(fiecare număr impar apare o singură dată într-o matrice din M).

a) Să se dea un exemplu format din două matrici diferite din M dar care au același determinant.

b) Să se verifice dacă există o matrice A din M astfel încât $\det A = \det I_3$.

c) Să se determine numărul de matrici din M care au pe linia întâi elementele 1, 3 și 5(nu neapărat în această ordine).

Soluție:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ **3p**

b) $\det A = \text{par}$, $\forall A \in M$ (suma a 6 numere impare) **1p**

$\det I_3 = 1$ **1p**

Două matrici egale ar avea determinanți egali și deci nu există matrice... **1p**

c) Avem $6! \cdot 6$ matrici de acest fel **1p**

4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$.

a) Să se demonstreze că $f(\ln 2) > 0$ (folosind eventual aproximarea $\ln 2 \approx 0,7$).

b) Să se demonstreze că $f(x) < 0, \forall x < 0$.

c) Să se demonstreze că $\sqrt{e} > 1,625$.

Soluție:

a) $f(\ln 2) = 1 - \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}$ **2p**

$f(\ln 2) > 0,05 > 0$ **1p**

b) $f'(x) = e^x - 1 - x$ **1p**

$f''(x) = e^x - 1$ **1p**

Folosind semnul derivatelor deduce concluzia **1p**

c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - \frac{13}{8}$ și din punctul (b) deducem concluzia **1p**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII A

1. Fie M mulțimea tuturor grupurilor cu 4 elemente.

- a) Să se dea exemplu de grup din M .
- b) Să se demonstreze că există un grup $G \subset M$ astfel încât $G \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$.
- c) Să se demonstreze că în M există măcar două grupuri neizomorfe.

Soluție:

- a) De exemplu $G = \mathbb{Z}_4$ **3p**
- b) $U_4 = \{1, -1, i, -i\}$ verifică condițiile **3p**
- c) Grupul lui Klein și \mathbb{Z}_4 nu sunt izomorfe..... **1p**

Observație: Orice alte exemple corecte vor fi punctate cu punctaj maxim

2. Fie funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.

- a) Să se demonstreze că $f(x) > 0, \forall x \in (0, \infty)$.

- b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

- c) Să se demonstreze că $\ln 2 > 0,66$.

Soluție:

- a) $f'(x) = \frac{x^2}{x+1} > 0, \forall x > 0$ deci f e strict crescătoare **2p**

- $f(0) = 0 \Rightarrow f(x) > 0$ **1p**

- b) $\int_0^1 \ln(1+x) dx = 2 \ln 2 - 1$ **2p**

- $\int_0^1 f(x) dx = 2 \ln 2 - \frac{4}{3}$ **1p**

- c) Conform punctelor (a) și (b) avem $\int_0^1 f(x) dx = 2 \ln 2 - \frac{4}{3} > 0$ deci $\ln 2 > \frac{2}{3}$ **1p**

3. Fie $f, g : \mathbb{Z}_{13} \rightarrow \mathbb{Z}_{13}, f(x) = x \cdot x, g(x) = x + x, \forall x \in \mathbb{Z}_{13}$.

- a) Să se determine două elemente distincte a și b din \mathbb{Z}_{13} astfel încât $f(a) = f(b)$ și $g(a) \neq g(b)$.

- b) Să se demonstreze că funcția f nu e surjectivă iar funcția g este bijectivă.

Soluție:

- a) $f(\widehat{12}) = f(\widehat{1}) = \widehat{1}$ **2p**

- $g(\widehat{12}) \neq g(\widehat{1})$ **2p**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

- b) $f(x) \neq 2, \forall x \in \mathbb{Z}_{13}$, deci f nu e surjectivă **1p**
 g e injectivă **1p**
Deducem că g e surjectivă datorită domeniului și codomeniului finite și de același cardinal sau cu ajutorul definiției **1p**

4. Fie mulțimea $P = \{f : [0,1] \rightarrow [0,1] \mid f \text{ continuă pe } [0,1], f(0) = 0, f(1) = 1\}$.

a) Să se demonstreze că în P avem măcar 2011 funcții.

b) Să se determine o funcție $f \in P$ cu proprietatea că $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

c) Să se demonstreze că există un număr infinit de funcții din P astfel încât $\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2011}$.

Soluție:

a) Funcțiile $f_n(x) = x^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ aparțin mulțimii P **3p**

b) $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ **2p**

c) $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ **1p**

Pentru orice $n \geq 2011$ avem $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2011}$ ceea ce încheie demonstrația.